힘에서 정보까지:
보존력, 라그랑지안, 뇌터 정리, 그리고 정보 게이지 이론 입문

토트샘 (ThothSaem)

Nov. 2025

Contents

프롤로그

물리를 처음 배울 때 우리는 보통 “힘”으로부터 시작합니다. 질량 m인 물체에 힘 $\mathbf{F}$가 작용하면 가속도 $\mathbf{a}$가 생기고,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

라는 뉴턴의 운동 법칙으로 운동을 설명하지요. 고등학교 수준의 역학에서는 이 식과 운동 방정식을 중심으로, 포물선 운동, 원운동, 단진동과 같은 다양한 예제를 풀어 봅니다.

하지만 대학교에 올라와 물리를 조금 더 깊게 공부하다 보면, “왜 항상 힘을 먼저 써야 할까?”, “에너지 중심으로는 설명할 수 없을까?”, “보존되는 양(에너지, 운동량, 각운동량)은 왜 보존되는가?”와 같은 질문이 자연스럽게 생겨납니다. 이 책은 바로 이런 질문들에서 출발하여, 고전역학의 기본 개념을 다시 정리하고, 라그랑지안과 뇌터 정리, 그리고 양자장과 정보 게이지 이론의 직관으로 이어지는 연결 고리를 차근차근 살펴보는 것을 목표로 합니다.

이 책의 흐름은 다음과 같습니다. 먼저 고등학교 역학에서 다루는 질점, 힘, 일과 에너지 개념을 간단히 복습한 뒤(1장), “보존력과 퍼텐셜 에너지”를 조금 더 수학적으로 정리합니다(2장). 이어 “고전적 장”을 도입하여, 장과 퍼텐셜 에너지의 관계를 다시 보고(3장), 질점이 아니라 “장” 자체에 에너지가 저장된다는 생각을 키워 나갑니다.

그 다음으로는 라그랑지안 $L = T - U$를 이용해 운동 방정식을 유도하는 라그랑지안 역학(4장)을 배우고, “대칭이 있으면 무엇이 보존되는가?”를 다루는 뇌터 정리를 간단한 예제와 함께 맛봅니다(5장). 이 과정에서 에너지 보존, 운동량 보존, 각운동량 보존이 “대칭성”과 어떻게 연결되는지를 반복해서 확인합니다.

이후에는 특수 상대론의 언어를 빌려 “상대론적 장”과 에너지–운동량 텐서의 개념을 소개하고(6장), 장 이론이 단순한 수학 놀이가 아니라, 현대 물리학의 기본 언어임을 느껴볼 수 있도록 구성했습니다. 마지막 부분에서는 양자역학과 양자장론으로의 기본적인 다리를 놓고(7장), “정보”와 “게이지 대칭”을 결합한 정보 게이지 이론의 아이디어를 아주 간단한 수준에서 소개합니다(8장). 이때 여러분이 이미 익숙해진 보존량, 대칭, 장, 에너지의 개념을 활용해 “정보 전류”를 바라보는 새로운 관점을 제시할 것입니다.

이 책은 완성된 이론서를 지향하기보다는, “힘 중심의 역학에서 대칭과 정보 중심의 물리”로 사고방식을 옮겨 가는 연습장에 가깝습니다. 각 장의 마지막에는 간단한 생각거리 문제와 요약을 넣어, 스스로 개념을 다시 정리해 볼 수 있도록 하였습니다.

이 책에서 다룰 내용의 로드맵

조금 더 구체적으로, 이 책의 로드맵을 요약하면 다음과 같습니다.

- **1–2장: 보존력, 비보존력, 퍼텐셜 에너지** 뉴턴 역학의 기본 개념을 복습하고, “보존력(보존장)”이라는 개념을 선적분과 기울기(∇)를 사용해 정리합니다. $\mathbf{F} = -\nabla U$ 와 같은 관계를 통해 힘과 퍼텐셜 에너지의 연결을 다시 한 번 분명히 합니다.

- **3장: 고전적 장과 퍼텐셜 에너지** "장(field)"이라는 개념을 도입하여, 중력장, 전기장, 자기장 등을 예로 들며 퍼텐셜과 장, 그리고 장에 저장된 에너지 사이의 관계를 설명합니다. 스칼라장, 벡터장의 직관과, 전기장 에너지 밀도 등도 간단히 다룹니다.

- **4장: 라그랑지안 역학** $L = T - U$ 형태의 라그랑지안과 작용 $S = \int L dt$를 정의하고, 변분 원리를 통해 오일러–라그랑주 방정식을 유도합니다. 뉴턴의 운동 방정식이 라그랑지안으로부터 어떻게 재구성되는지, 진자와 조화진동자를 예로 확인합니다.

- **5장: 대칭과 보존법칙, 뇌터 정리** 시간 병진 대칭 ⇒ 에너지 보존, 공간 병진 대칭 ⇒ 운동량 보존, 회전 대칭 ⇒ 각운동량 보존이라는 연결을 직관적으로 설명합니다. 여기서 "보존량은 대칭성의 그림자"라는 뇌터 정리의 핵심 메시지를 익힙니다.

- **6장: 상대론적 장과 에너지–운동량** 특수 상대론의 기본 아이디어(시공간, 4벡터)를 소개하고, 상대론적 입자와 장의 라그랑지안을 맛봅니다. 에너지–운동량 텐서 $T^{\mu\nu}$를 통해 에너지 밀도와 운동량 밀도, 에너지 흐름을 하나의 수학적 객체로 묶어 보는 감각을 익힙니다.

- **7장: 양자역학과 양자장론으로의 연결** 슈뢰딩거 방정식과 에너지 고유값 문제를 복습하고, "입자는 장의 양자"라는 양자장론의 직관을 간단히 소개합니다. 장에 대한 라그랑지안과 오일러–라그랑주 방정식이 어떻게 양자화의 출발점이 되는지 개념적으로 설명합니다.

- **8장: 정보 게이지 이론의 아이디어** 마지막으로, 엔트로피와 정보량의 개념을 간단히 소개하고, "정보 전류"와 "정보 게이지장"이라는 아이디어를 직관적인 예와 함께 설명합니다. 이때 앞에서 배운 "보존 전류–대칭–라그랑지안–장"의 연결 고리를 바탕으로, 물리 법칙을 "정보의 흐름"으로 바라볼 수 있는 관점을 제안합니다.

위 로드맵을 따라가다 보면, 처음에는 낯설게 느껴지는 라그랑지안과 뇌터 정리, 양자장과 게이지 대칭 같은 개념들이 "힘–에너지–대칭–정보"라는 하나의 줄 위에 놓여 있다는 사실을 자연스럽게 느끼게 될 것입니다.

선행 지식과 읽는 방법

이 책은 **대학 1–2학년 수준**의 수학 · 물리 지식을 가진 독자를 주된 대상으로 합니다. 엄밀한 수학적 증명보다는 "핵심 아이디어를 물리적으로 이해하는 것"에 초점을 맞추었기 때문에, 다음과 같은 배경 지식을 가지고 있다면 큰 어려움 없이 읽을 수 있습니다.

- **미적분** 기본적인 함수 미분, 적분, 연쇄법칙, 간단한 편미분과 다중 적분 개념을 알고 있으면 좋습니다.

- **벡터와 기초 선형대수** 2차원, 3차원 벡터, 내적과 외적, 길이와 각도의 개념, 그리고 간단한 행렬 연산에 익숙하다면 충분합니다.

- **고등학교 수준의 역학** 뉴턴의 운동 법칙, 등가속도 운동, 포물선 운동, 원운동, 역학적 에너지 보존법칙 등 기본 개념을 한 번 이상 공부해 본 경험이 있으면 좋습니다.

- **기초 전자기학(선택)** 전기장, 자기장, 쿨롱 힘, 전위 정도를 알고 있다면, 3장과 이후 장에서 나오는 예제들을 조금 더 편하게 이해할 수 있습니다.

만약 위의 내용 중 일부가 낯설더라도 너무 걱정하지는 마세요. 각 장의 앞부분에서 필요한 개념은 다시 간단히 복습하고, 본문에서는 가능한 한 직관적인 설명을 통해 공식을 받아들이도록 구성했습니다. 수식의 세부 유도보다 "왜 이런 모양의 식이 나오는지", "이 식이 말하는 물리적 의미가 무엇인지"를 중심으로 읽어도 충분합니다.

마지막으로, 이 책은 *한 번에 완전히 이해하는* 것을 목표로 하기보다는, 여러 번 반복해서 읽을 수 있는 "다리(bridge)" 역할을 하기를 바랍니다. 고전 역학과 전자기학, 상대론, 양자역학, 양자장론, 그리고 정보 게이지 이론처럼 보이는 다양한 주제들이 사실은 하나의 큰 그림 안에서 서로 연결되어 있다는 느낌을 얻을 수 있다면, 이 책의 목적은 충분히 달성된 것입니다.

토트샘 올림

2025년 11월

북한산 기슭에서

Chapter 1

힘, 일, 에너지의 재정리

이 장에서는 고등학교 역학에서 배웠던 기본 개념들을 *조금 더 수학적으로* 정리해 봅니다. 뉴턴의 운동법칙, 일과 에너지, 보존력과 비보존력의 개념을 차근차근 복습하면서, 다음 장에서 다룰 *보존장*과 *퍼텐셜 에너지*, 그리고 라그랑지안 형식으로 자연스럽게 이어질 수 있도록 기초를 다지는 것이 목적입니다.

1.1 고전역학의 기본 개념 복습

1.1.1 질점, 좌표계, 경로

고전역학에서 가장 단순한 물리적 대상은 **질점(point particle)**입니다. 질점은 실제로는 크기와 모양을 가진 물체이지만, 문제를 풀 때 그 크기나 회전 등을 *무시해도 될 만큼* 작은 점으로 이상화한 것입니다. 질점의 상태는 보통 그 위치와 속도로 기술합니다.

3차원 공간에서 질점의 위치는 좌표계에 따라

$$\mathbf{r}(t) = (x(t),\, y(t),\, z(t))$$

와 같이 위치 벡터로 나타낼 수 있습니다. 여기서 t는 시간이고, (x, y, z)는 선택한 **좌표계**에서의 성분입니다. 좌표계는 보통 직교 좌표계(데카르트 좌표계)를 사용하지만, 원운동이나 진자 운동처럼 대칭성이 있는 문제에서는 극좌표, 구면좌표 등을 쓰는 것이 더 편리할 때도 있습니다.

질점이 시간에 따라 움직일 때, 시간이 흐르면서 그리는 궤적

$$t \mapsto \mathbf{r}(t)$$

을 **경로(path)** 또는 **궤적(trajectory)**라고 부릅니다. 나중에 일(work)을 적분할 때, 이 경로를 따라서 힘을 적분하는 구조가 자연스럽게 등장하게 됩니다.

1.1.2 속도와 가속도, 뉴턴의 운동법칙

질점의 **속도**는 시간에 따른 위치의 변화율로 정의됩니다. 즉,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

입니다. 속도 벡터의 크기 $v = \|\mathbf{v}\|$를 보통 "속력(speed)"이라고 부릅니다.

가속도는 속도의 시간 변화율입니다.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

가속도가 0이면 속도가 일정하고, 속도의 방향과 크기가 바뀌면 가속도가 생깁니다.

뉴턴의 제2법칙은 다음과 같이 쓸 수 있습니다.

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m\mathbf{a},$$

여기서 m은 질점의 질량, $\mathbf{F}_{\text{net}}$은 질점에 작용하는 모든 힘의 합(합력)입니다. 이 식은 고전 역학에서 운동을 기술하는 *출발점*입니다.

1.1.3 일과 에너지의 정의

"일(work)"은 힘이 어떤 변위를 만들어 낼 때 전달되는 에너지의 양을 나타내는 물리량입니다. 힘 $\mathbf{F}$가 작용하는 동안 물체가 $\Delta\mathbf{r}$ 만큼 움직였다면, **일** W는

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$$

로 정의합니다. 여기서 $\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r}$는 내적(dot product)입니다.

힘이 시간이나 위치에 따라 달라지는 경우에는, 경로를 따라 **선적분(line integral)**으로 정의합니다.

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

여기서 $\mathcal{C}$는 물체가 실제로 이동한 경로입니다.

질량 m인 질점이 속력 v로 움직일 때, **운동 에너지(kinetic energy)** 는

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

로 정의합니다. 외력이 한 일 W는 운동 에너지의 변화와 연결되며, 이를 **일–에너지 정리**라고 부릅니다.

$$W_{\text{net}} = \Delta T.$$

1.1.4 스칼라량과 벡터량의 구분

물리량에는 방향이 있는 것과 없는 것이 있습니다.

- **스칼라량(scalar)**: 크기만 있고 방향은 없는 물리량 예: 질량 m, 온도 T, 에너지 E, 시간 t 등
- **벡터량(vector)**: 크기와 방향이 모두 중요한 물리량 예: 위치 $\mathbf{r}$, 속도 $\mathbf{v}$, 가속도 $\mathbf{a}$, 힘 $\mathbf{F}$ 등

에너지나 일은 *스칼라량*이며, 힘이나 속도는 *벡터량*입니다. 특히, **일은 벡터량(힘과 변위)의 내적이므로 스칼라**라는 점을 명확히 기억해 두면, 이후 퍼텐셜 에너지와 라그랑지안 등을 이해할 때 헷갈리지 않습니다.

1.2 일과 경로: 힘에서 에너지로

1.2.1 일의 선적분 정의

힘이 위치에 따라 달라지는 일반적인 상황에서는, 짧은 변위 $d\mathbf{r}$ 동안 힘 $\mathbf{F}$가 하는 *아주 작은 일* dW를

$$dW = \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

로 정의합니다. 전체 경로 $\mathcal{C}$를 따라 이동할 때의 일은 이 작은 일들을 모두 더하는 적분으로 표현됩니다.

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

이와 같이 경로를 따라 벡터장을 적분하는 것을 **선적분**이라고 합니다. 선적분은 보존력과 비보존력을 구별하는 데 핵심 역할을 하게 됩니다.

1.2.2 경로에 따른 일의 의존성

일반적으로, 같은 시작점 $\mathbf{r}_i$에서 같은 끝점 $\mathbf{r}_f$로 이동한다 하더라도, *어떤 경로*를 택했는지에 따라

$$W = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

의 값이 달라질 수 있습니다. 예를 들어, 마찰력이 존재하는 바닥 위에서 물체를 움직일 때, 직선으로 밀어 옮기는 경우와 곡선으로 돌아서 옮기는 경우를 비교하면, 총 이동 거리(경로 길이)가 다르기 때문에 마찰력이 한 일도 달라집니다.

특히, 시작점과 끝점이 같은 *닫힌 경로(closed path)*를 따라 선적분을 계산했을 때

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

가 0인지 아닌지는, 그 힘이 "보존력"인지 아닌지를 판별하는 중요한 기준이 됩니다. (이에 대해서는 다음 장과 보존력 논의에서 다시 다룹니다.)

1.2.3 간단한 예: 일정한 힘, 위치에 따라 변하는 힘

(1) 일정한 힘의 경우 중력가속도 $\mathbf{g}$가 일정한 근지구장에서, 질량 m인 물체에 작용하는 중력은

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}$$

로 일정합니다. 이때 높이 y에서 $y + \Delta y$까지 수직으로 이동할 때 중력이 한 일은

$$W = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = mg\Delta y$$

(위 방향을 양의 방향으로 잡으면 부호에 주의해야 합니다.) 이 경우, 경로가 수직이든 사선이든 상관없이 *처음 높이와 나중 높이만*으로 일이 결정됩니다. 즉, 경로에 무관합니다.

(2) 위치에 따라 변하는 용수철 힘 후크의 법칙을 따르는 이상적인 용수철의 힘은

$$F(x) = -kx$$

입니다. 용수철을 $x = x_i$에서 $x = x_f$까지 천천히 변형시킬 때, 외력이 한 일은

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\, dx = -\frac{1}{2}k(x_f^2 - x_i^2)$$

입니다. 이 값은 경로의 모양과 상관없이, 오직 시작점과 끝점의 좌표로만 결정됩니다. 이 역시 "퍼텐셜 에너지"의 존재를 암시하는 특징입니다.

1.3 보존력과 비보존력의 직관

1.3.1 보존력의 정의: 경로에 무관한 일

어떤 힘 $\mathbf{F}$에 대하여, 질점이 $\mathbf{r}_i$에서 $\mathbf{r}_f$로 이동할 때 힘이 하는 일이 *오직 시작점과 끝점에만* 의존하고, 경로에 의존하지 않는다면, 그 힘을 **보존력(conservative force)**이라고 부릅니다. 즉, 어떤 두 경로 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$에 대해

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

라면 $\mathbf{F}$는 보존력입니다.

이를 다른 말로 표현하면, 모든 닫힌 경로에 대해

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

이면, $\mathbf{F}$는 보존력입니다. 보존력에 대해서는 항상 *퍼텐셜 에너지* $U(\mathbf{r})$를 정의할 수 있고, 보통

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

와 같은 관계를 만족합니다. (이 식은 다음 장에서 자세히 다룹니다.)

1.3.2 비보존력(마찰 등)의 특징

마찰력, 공기저항력, 유체저항력 등은 보통 **비보존력(non-conservative force)**으로 분류됩니다. 이 힘들은 일반적으로

- 경로의 길이에 비례해서 일을 하고,
- 닫힌 경로를 따라 이동해도, 그 경로를 따라 한 일이 0이 아니며,
- 그 과정에서 기계적 에너지가 열(내부 에너지) 등의 다른 형태로 변환됩니다.

예를 들어, 마찰력이 f_k로 거의 일정하다고 가정하면, 길이가 L인 경로를 따라 물체를 움직일 때 마찰력이 한 일은

$$W_{\text{마찰}} \approx -f_k L$$

입니다. 경로가 길어질수록 마찰이 한 일의 크기도 커지고, 이는 곧 더 많은 기계적 에너지가 열로 변환됨을 의미합니다.

1.3.3 보존력/비보존력 분류 연습 문제

아래의 힘들을 보존력인지 비보존력인지 분류해 보세요.

1. 근지구장 중력: $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$ (단, $\mathbf{g}$는 일정)
2. 만유인력: $\mathbf{F} = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$
3. 이상적인 용수철 힘: $\mathbf{F} = -kx\,\hat{\mathbf{x}}$
4. 운동 방향에 반대인 속도 비례 저항력: $\mathbf{F} = -b\mathbf{v}$
5. 일정한 마찰 계수를 가지는 운동 마찰력: $\mathbf{F} = -f_k\hat{\mathbf{v}}$

힌트: "닫힌 경로에서 한 일이 0인가?", "퍼텐셜 에너지를 정의할 수 있는가?", "기계적 에너지가 열 등으로 전환되는가?"를 기준으로 생각해 보면 좋습니다.

1.4 에너지 보존법칙의 의미

1.4.1 역학적 에너지 보존

보존력만 작용하는 계에서는, **역학적 에너지(mechanical energy)**

$$E_{\text{mech}} = T + U$$

가 시간에 따라 일정하게 유지됩니다. 여기서 T는 운동 에너지, U는 퍼텐셜 에너지입니다.

보존력이 하는 일은 퍼텐셜 에너지의 변화와 다음과 같이 연결됩니다.

$$W_{\text{보존력}} = -\Delta U.$$

또한, 일–에너지 정리 $W_{\text{net}} = \Delta T$와 결합하면

$$\Delta T = -\Delta U \quad \Rightarrow \quad \Delta(T + U) = 0$$

가 되어, $T + U$가 상수임을 알 수 있습니다. 이것이 바로 "역학적 에너지 보존법칙"입니다.

1.4.2 계의 경계와 에너지의 유입/유출

에너지가 보존된다는 말은 "우주의 전체 에너지"가 일정하다는 아주 큰 스케일의 이야기이기도 하지만, 실제 계산에서는 *어떤 계(system)를 선택하는가*가 매우 중요합니다.

어떤 물체나 몇 개의 물체 집합을 하나의 "계"로 잡았을 때, 그 계의 경계(boundary)를 통해 에너지(또는 물질)가 드나들 수 있습니다. 이때

- 계 *안*에서의 역학적 에너지는 변할 수 있지만,
- 계 *밖*에서 들어오는 일이나 열을 함께 고려하면,
- "계 + 주변 환경" 전체로는 에너지가 보존됩니다.

즉, "에너지가 보존된다"는 것은

$$\text{에너지의 시간 변화량} = \text{계 밖에서 들어온 양} - \text{계 밖으로 나간 양}$$

과 같은 형태로 이해할 수 있으며, 우리가 어떤 범위를 "계"로 잡는지에 따라 수식이 달라질 수 있습니다.

1.4.3 닫힌계와 열린계의 비교

에너지 보존을 논의할 때, 다음과 같은 용어를 자주 사용합니다.

- **닫힌계(closed system)** 또는 **고립계(isolated system)** 이상적으로는 외부와 에너지의 교환이 없는 계입니다. 외력이 없고, 열의 출입도 없다면, 이 계의 총 에너지는 상수입니다.
- **열린계(open system)** 외부와 에너지(또는 물질)를 주고받을 수 있는 계입니다. 이 경우, 계의 에너지는 시간에 따라 변할 수 있으며, 변하는 양은 외부로부터 들어온 일과 열에 의해 결정됩니다.

고전역학 문제를 풀 때는 보통 "닫힌계" 또는 "마찰이 없는 이상적인 상황"을 먼저 다룬 다음, 이후에 비보존력이나 외부 요인을 하나씩 추가해 나가며 현실적인 상황으로 확장합니다.

이 책의 다음 장들에서는, 이러한 에너지 보존의 아이디어를 *보존장과 퍼텐셜 에너지*, 그리고 *라그랑지안*과 *뇌터 정리*의 언어로 어떻게 다시 표현할 수 있는지 살펴보게 될 것입니다.

Chapter 2

보존장과 퍼텐셜 에너지

앞 장에서는 "보존력"과 "비보존력"을 *일과 경로*의 관점에서 직관적으로 살펴보았습니다. 이제는 이를 조금 더 수학적인 언어로 정리해 봅니다. 특히, **벡터장과 선적분**, **회전(curl)**, **퍼텐셜 에너지**의 관계를 정리하고, 대표적인 보존력들을 퍼텐셜로 표현해 보는 것이 목표입니다.

나아가, 완전히 보존적이지 않은 힘(마찰, 저항력 등)에 대해서는 "유효 퍼텐셜"이라는 아이디어가 어떻게 등장하는지도 가볍게 맛보겠습니다.

2.1 보존장(conservative field)의 수학적 정의

2.1.1 벡터장, 선적분, 순환선 적분

앞 장에서 보았듯이, 힘 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$는 공간의 각 점 $\mathbf{r}$에 하나의 벡터가 대응되는 **벡터장(vector field)**입니다. 예를 들어,

- 중력장 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$
- 전기장 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$
- 유체의 속도장 $\mathbf{v}(\mathbf{r})$

등은 모두 벡터장의 좋은 예입니다.

어떤 경로 $\mathcal{C}$를 따라 벡터장 $\mathbf{F}$를 적분하는 **선적분**은 다음과 같이 정의합니다.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

여기서 $d\mathbf{r}$은 경로를 따라 아주 조금 이동한 벡터입니다. 이 적분은 물리적으로는 "경로 $\mathcal{C}$를 따라 힘 $\mathbf{F}$가 한 일"로 해석할 수 있습니다.

특히, 시작점과 끝점이 같은 *닫힌 경로* $\mathcal{C}$를 따라 선적분을 할 때, 보통 다음과 같이 기호를 씁니다.

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

이 값을 **순환선 적분(circulation integral)** 또는 단순히 **순환(circulation)**이라고 부르기도 합니다. 이 값이 0인지 아닌지는, 그 벡터장이 보존장인지 아닌지를 판별하는 중요한 특징이 됩니다.

2.1.2 보존장과 그 조건

앞 장에서 보존력을 다음과 같이 정의했습니다.

> "시작점과 끝점이 같을 때, 경로에 상관없이 힘이 한 일이 항상 0인 힘"

즉, 모든 닫힌 경로 $\mathcal{C}$에 대해

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

이면, $\mathbf{F}$는 보존장(conservative field)입니다.

벡터해석학에서 알려진 중요한 사실 하나나는, "적당한 조건 아래에서는" 위 조건이 **회전 (curl)**이 0인 것과 동치라는 점입니다. 회전(curl)은 다음과 같이 정의되는 벡터 연산자입니다.

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}.$$

여기서 $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$입니다.

직관적으로, $\nabla \times \mathbf{F}$는 벡터장 $\mathbf{F}$의 *소용돌이* 성분을 나타냅니다. 만약

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

라면, 그 벡터장은 "소용돌이 없는(irrotational)" 장이라고 부르고, 적당한 조건에서 이것이 곧 "퍼텐셜을 가질 수 있는 보존장"과 연결됩니다.

2.1.3 단순연결영역과 보존성

위에서 "적당한 조건"이라고 한 부분이 바로 **단순연결영역(simply connected region)** 입니다. 간단히 말하면, 공간 안에 "구멍"이 없어서 어떤 닫힌 곡선도 연속적으로 줄여가면 한 점으로 수축시킬 수 있는 영역을 단순연결영역이라고 부릅니다.

- 예: 평면 전체, 구 내부, 단일 구의 외부(무한대까지 포함)는 단순연결영역입니다.
- 반예: 가운데 구멍이 뚫린 도넛 모양(토러스), 평면에서 한 점을 뺀 영역 등은 단순연결이 아닙니다.

벡터해석학의 핵심 정리(벡터장 이론) 중 하나는 다음과 같습니다.

> 단순연결영역에서 정의된 벡터장 $\mathbf{F}$에 대해
>
> $$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
>
> 이면, 어떤 스칼라 함수(퍼텐셜 함수) $U(\mathbf{r})$가 존재하여
>
> $$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$
>
> 로 쓸 수 있다.

따라서, "닫힌 경로에서 한 일이 0"인 보존력은 "회전이 0인 소용돌이 없는 장"이며, "스칼라 퍼텐셜의 기울기로 표현될 수 있는 장"과 모두 연결됩니다. 이제 다음 절에서는 퍼텐셜 에너지와 이 기울기 관계를 좀 더 자세히 살펴보겠습니다.

2.2 퍼텐셜 에너지와 기울기

2.2.1 퍼텐셜 에너지의 정의

보존력 $\mathbf{F}(\mathbf{r})$에 대해서는 항상 퍼텐셜 에너지 $U(\mathbf{r})$를 정의할 수 있습니다. 기준점을 하나 $\mathbf{r}_0$ 정해 두고, 그 점에서의 퍼텐셜을 $U(\mathbf{r}_0) = 0$과 같이 정한 뒤, 어떤 점 $\mathbf{r}$까지 가는 동안 *보존력이 하는 일*을 적분하여 퍼텐셜을 다음과 같이 정의합니다.

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'.$$

보존력의 경우, 위 적분은 *어떤 경로를 택하더라도* 값이 같습니다. 따라서 $U(\mathbf{r})$는 경로에 무관하게 잘 정의되는 함수가 됩니다.

퍼텐셜 에너지는 "어떤 위치에 있을 때 그 계가 가지고 있는 에너지(나중에 운동 에너지 등으로 바뀔 수 있는 에너지)"를 의미합니다.

2.2.2 힘과 퍼텐셜 에너지 관계의 유도

위의 정의로부터 $\mathbf{F}$와 U의 관계를 유도해 봅시다. 퍼텐셜 에너지의 미소 변화는,

$$dU = \nabla U \cdot d\mathbf{r}$$

로 쓸 수 있습니다. 한편, 퍼텐셜 정의에서

$$U(\mathbf{r}) = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

이므로, $\mathbf{r}$에서 아주 조금 $d\mathbf{r}$만큼 이동했을 때의 퍼텐셜 변화는

$$dU = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

입니다. 두 식을 비교하면

$$\nabla U \cdot d\mathbf{r} = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

가 되어, 모든 $d\mathbf{r}$에 대해서 성립해야 하므로

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

를 얻을 수 있습니다.

즉, **보존력은 퍼텐셜 에너지의 음의 기울기**로 표현됩니다. 그리고 이 관계로부터, 퍼텐셜 에너지가 많이 감소하는 방향으로 힘이 작용한다는 물리적 의미도 읽을 수 있습니다.

2.2.3 퍼텐셜 차이와 일

퍼텐셜 에너지의 변화량은

$$\Delta U = U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i)$$

이고, 정의에 의해

$$U(\mathbf{r}_f) - U(\mathbf{r}_i) = -\int_{\mathbf{r}_i}^{\mathbf{r}_f} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -W_{\mathbf{F}}$$

가 됩니다. 즉,

$$\Delta U = -W_{\mathbf{F}}$$

입니다.

이 식은 *보존력이 한 일* $W_{\mathbf{F}}$와 *퍼텐셜 에너지의 변화* ΔU 사이의 직접적인 관계를 보여줍니다. 보존력이 양의 일을 하면 퍼텐셜 에너지는 감소하고, 보존력이 음의 일을 하면 퍼텐셜 에너지는 증가합니다.

이 관계는 일–에너지 정리와 결합하여, 앞 장에서 본 역학적 에너지 보존

$$\Delta(T+U)=0$$

을 자연스럽게 이해할 수 있게 해 줍니다.

2.3 대표적인 보존력 예제

2.3.1 중력 퍼텐셜(근지구장, 만유인력)

(1) 근지구장에서의 중력 퍼텐셜 지표면 근처에서 중력가속도 $\mathbf{g}$를 일정한 벡터로 근사하면, 중력은 $\mathbf{F}=m\mathbf{g}$로 쓸 수 있습니다. 편의를 위해 y축을 위쪽, $\mathbf{g}=-g\hat{\mathbf{y}}$로 잡으면, 중력이 한 일은

$$W=\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int -mg\,dy.$$

퍼텐셜 에너지를 $U(y)$로 두고

$$F_y=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}$$

를 이용하면,

$$-mg=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}=mg$$

이므로

$$U(y)=mgy+\text{상수}$$

가 됩니다. 보통 $y=0$에서 $U=0$으로 잡으면

$$U(y)=mgy$$

로 쓸 수 있지요. 이것이 고등학교에서 익숙한 “중력 퍼텐셜 에너지”입니다.

(2) 만유인력 퍼텐셜 두 질점 m과 M 사이의 만유인력은

$$\mathbf{F}(\mathbf{r})=-G\frac{mM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

입니다. 여기서 r은 두 질점 사이의 거리입니다.

퍼텐셜 $U(r)$에 대해

$$F_r=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=-G\frac{mM}{r^2}$$

이므로,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=G\frac{mM}{r^2}\quad\Rightarrow\quad U(r)=-G\frac{mM}{r}+\text{상수}$$

를 얻습니다. 보통 $r\to\infty$에서 $U\to 0$이 되도록 상수를 잡으면,

$$U(r)=-G\frac{mM}{r}$$

이 됩니다. 이 퍼텐셜은 행성의 궤도나 인공위성 운동을 설명하는 데 핵심적인 역할을 합니다.

2.3.2 용수철 힘과 조화진동자 퍼텐셜

후크의 법칙을 따르는 1차원 용수철의 힘은

$$F(x) = -kx$$

입니다. 퍼텐셜 $U(x)$에 대해

$$F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = -kx$$

이므로,

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = kx \quad \Rightarrow \quad U(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \text{상수}$$

가 됩니다. $x = 0$에서 $U = 0$으로 잡으면

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

입니다.

이 퍼텐셜은 **조화진동자(harmonic oscillator)** 퍼텐셜이라고 하며, 고전역학은 물론 양자역학에서도 가장 중요한 모형 중 하나입니다. 작은 진동, 안정된 평형 주변의 운동 등을 기술할 때 폭넓게 사용됩니다.

2.3.3 쿨롱 법칙과 전기 퍼텐셜

점전하 q가 만들어내는 전기장은

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

입니다. 또 다른 점전하 q'가 이 장에서 받는 힘은 $\mathbf{F} = q'\mathbf{E}$입니다.

전기 퍼텐셜(전위) $\phi(\mathbf{r})$는

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

로 정의됩니다. 이를 이용하여,

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

이므로,

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r} + \text{상수}$$

가 됩니다. 역시 $r \to \infty$에서 $\phi \to 0$이 되도록 상수를 잡으면

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}$$

입니다.

전하 q'가 이 전기 퍼텐셜에서 가지는 퍼텐셜 에너지는

$$U(\mathbf{r}) = q'\,\phi(\mathbf{r})$$

로 정의됩니다. 따라서

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r}$$

가 되고, 이는 쿨롱 상호작용 에너지로 해석할 수 있습니다.

2.4 비보존력과 유효 퍼텐셜 개념

2.4.1 마찰력, 저항력의 모형화

마찰력이나 공기 저항력은 일반적으로 *비보존력*입니다. 예를 들어,

$$\mathbf{F}_{\text{마찰}} = -f_k \hat{\mathbf{v}}, \qquad \mathbf{F}_{\text{저항}} = -b\mathbf{v}$$

와 같이 모형화할 수 있습니다($\hat{\mathbf{v}}$는 속도 방향 단위벡터). 이때, 이 힘들이 하는 일은 항상

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \leq 0$$

인 경우가 많으며, 역학적 에너지를 줄이는 방향으로 작용합니다.

이러한 비보존력에 대해서는 일반적으로 $U(\mathbf{r})$ 같은 *퍼텐셜 에너지*를 정의할 수 없습니다. 경로에 따라 한 일이 달라지는 탓에, "위치만의 함수"로 에너지를 정리하기 어렵기 때문입니다.

2.4.2 저항력 하에서의 에너지 변화

비보존력이 있을 때는, 역학적 에너지가 시간에 따라 감소하거나 증가할 수 있습니다. 예를 들어, 마찰력이 한 일은

$$W_{\text{마찰}} = -\int f_k \, ds$$

처럼 보통 음수가 되어, 운동 에너지가 줄어들고 그만큼 열(내부 에너지)로 전환됩니다.

이때 전체 에너지(운동 에너지 + 퍼텐셜 에너지 + 열에너지 등)는 보존되지만, 우리가 "역학적 에너지"라고 부르는 부분 $T + U$만 보면

$$\Delta(T + U) \neq 0$$

입니다. 즉, *역학적 에너지 보존법칙은 보존력만 작용할 때에만 성립*하고, 비보존력이 있을 때는 그만큼의 에너지가 다른 형태로 빠져나가거나 들어온다고 이해해야 합니다.

2.4.3 중력+원심력에서의 유효 퍼텐셜(맛보기)

비보존력과는 조금 다른 맥락에서, 여러 종류의 힘을 *퍼텐셜 에너지 하나*로 모아 표현하는 아이디어가 있습니다. 이를 **유효 퍼텐셜(effective potential)**이라고 부릅니다.

예를 들어, 구심력/원심력 효과가 있는 회전 좌표계나, 중심력을 받는 궤도 운동(행성, 인공위성 등)에서는 중력 퍼텐셜에 추가로

$$U_{\text{원심}}(r) = \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

와 같은 형태의 "원심 퍼텐셜"을 도입하여,

$$U_{\text{eff}}(r) = U_{\text{중력}}(r) + U_{\text{원심}}(r)$$

처럼 하나의 유효 퍼텐셜로 묶어서 생각할 수 있습니다. 이 $U_{\text{eff}}(r)$에 대해 1차원 운동처럼

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r)$$

를 쓰면, 궤도의 형태(원궤도, 타원궤도, 산란 궤도 등)를 직관적으로 이해하는 데 매우 도움이 됩니다.

이처럼, 직접적으로는 보존력이라고 보기 어렵거나, 여러 효과가 섞여 있는 상황에서도, 적당한 좌표계와 변수 선택을 통해 "퍼텐셜 형태의 유효 에너지"를 도입할 수 있습니다. 다음 장에서 다룰 **라그랑지안**과 **일반화 좌표** 개념은, 이 유효 퍼텐셜 아이디어를 훨씬 더 체계적으로 다루게 해 줄 것입니다.

Chapter 3

고전적 장 이론과 퍼텐셜 에너지

앞 장에서는 “보존력”과 “퍼텐셜 에너지”를 질점의 운동과 연결하여 살펴보았습니다. 이제 한 걸음 더 나아가, **장(field)**의 관점에서 퍼텐셜과 에너지를 이해해 보겠습니다.

장 이론은 단순히 “힘의 표현 방식”을 바꾸는 것이 아니라, 현대 물리학의 기본 언어가 되는 개념입니다. 중력장, 전기장, 자기장, 온도장 등은 모두 “공간의 각 점에 어떤 물리량이 정의되어 있다”는 의미에서 장의 대표적인 예입니다.

이 장의 목표는 다음과 같습니다.

- 스칼라장, 벡터장의 직관을 이해한다.
- 퍼텐셜과 장이 어떻게 연결되는지 다시 정리한다.
- “장 자체가 에너지를 가진다”는 생각을 받아들인다.
- 파동과 에너지 흐름의 개념을 통해 장과 보존법칙을 엿본다.

3.1 장(field)의 직관적 이해

3.1.1 스칼라장과 벡터장

장(field)이란, 공간(또는 시공간)의 각 점에 어떤 물리량이 할당되어 있는 것을 말합니다.

- 각 점에 *숫자 하나*가 붙어 있다면 **스칼라장(scalar field)**입니다.
- 각 점에 *벡터*가 붙어 있다면 **벡터장(vector field)**입니다.

예를 들어,

- 온도 $T(\mathbf{r})$: 공간의 각 점에서의 온도 ⇒ 스칼라장
- 전기 퍼텐셜 $\phi(\mathbf{r})$: 각 점에서의 전위 ⇒ 스칼라장
- 중력장 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$: 각 점에서의 중력가속도 ⇒ 벡터장
- 전기장 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$: 각 점에서의 전기력/단위전하 ⇒ 벡터장

스칼라장은 “얼마나(크기)”를 말하고, 벡터장은 “얼마나 + 어느 방향”까지 함께 말합니다. 나중에 양자장론에서는 이들 외에도 스핀을 가진 장, 행렬값 장 등 더 복잡한 장들도 등장하지만, 이 장에서는 스칼라장과 벡터장을 중심으로 봅니다.

3.1.2 연속 분포로서의 장: 온도장, 중력장, 전기장 예

온도장을 예로 들어 봅시다. 방 안의 어느 위치 $\mathbf{r}$에서의 온도를 $T(\mathbf{r})$라고 할 때, 이 함수 T는 방 전체(공간)에 걸쳐 온도를 쭉 연속적으로 정의합니다. 이를 "온도장"이라고 부릅니다.

비슷하게,

- 지구 주위에서의 중력가속도 $\mathbf{g}(\mathbf{r})$
- 전하 분포가 만드는 전기장 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$

도 공간 전체에 연속적으로 정의되는 벡터장이며, 각 점에서 "힘이 어느 방향으로 얼마나 작용하는지"를 알려줍니다.

장이라는 개념은 "한 점에만 작용하는 힘"이 아니라, "공간 전체에 펼쳐진 힘의 분포"를 다루는 자연스러운 언어입니다.

3.1.3 공간의 각 점에 값이 붙는다는 의미

"공간의 각 점에 값이 붙는다"는 말은, 각 위치 $\mathbf{r}$마다 어떤 물리량이 *정해져 있다*는 뜻입니다. 수학적으로는

$$(\text{위치})\ \mathbf{r} \quad \mapsto \quad (\text{물리량})\ \Phi(\mathbf{r})$$

와 같은 함수 관계를 말합니다. 여기서 Φ는 T나 ϕ 같은 스칼라일 수도 있고, $\mathbf{E}$나 $\mathbf{B}$ 같은 벡터일 수도 있습니다.

이 관점을 받아들이면,

- "입자–입자 사이의 힘" 대신
- "입자는 장과 상호작용한다"는 표현이 훨씬 자연스러워집니다.

예를 들어, "전하 q가 다른 전하가 만든 전기장 $\mathbf{E}$에서 힘 $q\mathbf{E}$를 받는다" 는 식으로, 장을 매개로 하여 상호작용을 기술하게 됩니다.

이제 퍼텐셜과 장의 관계를 살펴보면서, "장 = 퍼텐셜의 기울기"라는 그림을 좀 더 분명히 하겠습니다.

3.2 퍼텐셜과 장의 관계

3.2.1 스칼라 퍼텐셜에서 장의 기울기: $\mathbf{F} = -\nabla U$

앞 장에서 보았듯이, 보존력 $\mathbf{F}$에 대해서는 항상 퍼텐셜 에너지 $U(\mathbf{r})$를 정의할 수 있고,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$$

로 쓸 수 있습니다. 여기서 ∇는 기울기(gradient) 연산자입니다.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

이 식은 다음과 같은 의미를 가집니다.

- 퍼텐셜 U는 스칼라장입니다. (각 점마다 숫자 하나)
- ∇U는 퍼텐셜이 "어느 방향으로 얼마나 빨리 변하는지"를 나타내는 벡터장입니다.
- 힘은 퍼텐셜이 가장 빨리 감소하는 방향(음의 기울기 방향)으로 작용합니다.

즉, **보존력 = 퍼텐셜의 음의 기울기**라는 관계는, 스칼라장(퍼텐셜)과 벡터장(힘 또는 장)을 연결해 주는 핵심 공식입니다.

3.2.2 전기 퍼텐셜과 전기장

전기장 $\mathbf{E}$도 보존력에서 나온 장의 한 예입니다(정전기 상황에서). 정전기에서, 전기장 $\mathbf{E}$는 전기 퍼텐셜(전위) ϕ의 기울기로 쓸 수 있습니다.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}).$$

여기서 $\phi(\mathbf{r})$는 "단위 전하가 그 위치에서 가지는 전기 퍼텐셜 에너지" 혹은 "전위"라고 부르는 스칼라장입니다. 전하 q가 전기장 속에 있을 때, 그 퍼텐셜 에너지는

$$U(\mathbf{r}) = q\,\phi(\mathbf{r})$$

로 정의됩니다.

따라서

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} = -q\nabla\phi$$

이고, 앞에서 본 $\mathbf{F} = -\nabla U$와도 잘 맞습니다.

$$\mathbf{F} = -\nabla U = -\nabla(q\phi) = -q\nabla\phi = q\mathbf{E}.$$

이처럼, "전기장 = 전기 퍼텐셜의 기울기"는 퍼텐셜과 장의 관계를 가장 잘 보여 주는 대표적인 예입니다.

3.2.3 벡터 퍼텐셜의 개념 맛보기: 자기 퍼텐셜 A

전기장과 달리 자기장 $\mathbf{B}$는 일반적으로 **스칼라 퍼텐셜 하나로는** 표현하기 어렵습니다. 대신, **벡터 퍼텐셜(vector potential) $\mathbf{A}(\mathbf{r})$**을 도입하여

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

로 표현합니다.

여기서 $\nabla\times$는 **회전(curl)** 연산자입니다. 이 관계는 다음과 같은 점에서 중요합니다.

- 자기장은 보통 "소용돌이" 구조를 가지므로, 스칼라 퍼텐셜보다는 벡터 퍼텐셜로 표현하는 것이 자연스럽습니다.
- 전자기학의 라그랑지안, 양자역학(자기장 속 전자), 양자장론 등에서는 $\mathbf{A}$가 훨씬 기본적인 역할을 합니다.

이 장에서는 "*자기장은 벡터 퍼텐셜의 회전이다*"라는 수준까지만 맛보고, 자세한 내용은 향후 전자기학, 양자역학, 게이지 이론에서 다루게 될 것입니다.

3.2.4 게이지 자유도에 대한 첫 번째 언급

벡터 퍼텐셜 $\mathbf{A}$에는 **게이지 자유도(gauge freedom)**라는 흥미로운 특징이 있습니다. 예를 들어, 임의의 스칼라 함수 $\chi(\mathbf{r})$에 대해

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\chi$$

라고 새로운 벡터 퍼텐셜을 정의해도, 자기장은 변하지 않습니다.

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla\chi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}.$$

즉, **다른 $\mathbf{A}$라도 같은 $\mathbf{B}$를 만들 수 있다**는 의미입니다. 이 "표현의 자유"가 바로 게이지 자유도입니다.

게이지 자유도는 나중에 **게이지 대칭**, **게이지 이론**, 더 나아가 **정보 게이지 이론**으로까지 연결되는 중요한 개념입니다. 지금은 "벡터 퍼텐셜에는 여러 표현이 가능하고, 물리적 장(자기장)은 그 중 하나에만 의존한다"는 정도의 직관만 가지고 있으면 충분합니다.

3.3 장에 저장된 에너지

3.3.1 에너지 밀도와 부피 적분의 개념

지금까지 퍼텐셜 에너지는 주로 “입자 몇 개의 위치에 따라 정해지는 에너지”로 생각해 왔습니다. 하지만 장 이론의 관점에서는, **에너지가 장 자체에 분포**할 수 있습니다.

이를 위해 **에너지 밀도(energy density)**라는 개념을 도입합니다. 에너지 밀도 $u(\mathbf{r})$는 “단위 부피당 에너지”를 의미합니다. 총 에너지는 공간 전체에 걸쳐 에너지 밀도를 적분하여 얻습니다.

$$E = \int_{\text{공간}} u(\mathbf{r})\, d^3 r.$$

이 표현은 “에너지가 공간 곳곳에 조금씩 나누어져 있다”는 이미지와 잘 어울립니다. 전기장, 자기장, 탄성 매질의 파동 등에서 이 개념을 구체적으로 볼 수 있습니다.

3.3.2 전기장 에너지, 자기장 에너지 밀도

정전기에서, 전기장 $\mathbf{E}$에 저장된 에너지 밀도는

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\,\mathbf{E}^2$$

로 표현됩니다($\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$). 공간 전체에 걸친 전기장 에너지는

$$E_E = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\,\mathbf{E}^2\, d^3 r.$$

마찬가지로 자기장 $\mathbf{B}$에 저장된 에너지 밀도는

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0}\,\mathbf{B}^2$$

이며, 자기장 에너지는

$$E_B = \int \frac{1}{2\mu_0}\,\mathbf{B}^2\, d^3 r.$$

이 식들은 “장 자체가 에너지를 가진다”는 생각을 매우 구체적인 수식으로 보여 줍니다.

3.3.3 퍼텐셜 에너지와 장 에너지의 대응 관계

처음에는 두 전하 q_1, q_2 사이의 에너지를

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

처럼 “입자–입자 사이의 퍼텐셜 에너지”로 표현했습니다. 하지만, 전기장 관점에서는 같은 물리 상황을

$$E = \int \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}^2 d^3 r$$

와 같이 “전기장에 분포된 에너지”로 표현할 수도 있습니다.

두 관점은 서로 모순되는 것이 아니라, **서로 다른 기술 방법**입니다.

- *입자 관점*: “입자 사이에 퍼텐셜 에너지가 저장되어 있다.”
- *장 관점*: “입자가 만들어낸 장에 에너지가 저장되어 있다.”

장 이론과 양자장론에서는 점점 후자의 관점이 더 기본적인 것으로 취급됩니다. “입자도 결국 장의 양자(quantum)일 뿐이다”라는 말은 이러한 시각의 연장선에 있습니다.

3.3.4 입자–입자 상호작용 vs 장 에너지 해석

퍼텐셜 에너지 $U(r)$로 설명할 것인지, 장 에너지 $\int u(\mathbf{r})d^3r$로 설명할 것인지는 상황과 편의에 따라 달라집니다.

- 두 입자 사이의 간단한 문제를 풀 때는 퍼텐셜 에너지 $U(r)$가 편합니다.
- 전하 분포 전체, 복잡한 장의 중첩, 전자기파 등의 문제에서는 장 에너지 밀도 u_E, u_B가 더 자연스럽습니다.

중요한 점은, 두 방식 모두 동일한 물리적 에너지를 표현하며, 결국 *동일한 물리적 결과*를 준다는 것입니다. 이 장에서는 "둘 다 가능하다"는 감각만 잡아두면 충분합니다.

3.4 파동과 에너지 흐름

3.4.1 파동 방정식의 간단한 예: 줄의 진동

장에 저장된 에너지는 **파동(wave)**의 형태로 공간을 따라 전파될 수도 있습니다. 가장 단순한 예로, 줄(현)의 가로 방향 진동을 생각해 봅시다.

줄의 작은 변위를 $\psi(x,t)$라고 하면, 이것은 1차원 스칼라장입니다. (각 위치 x, 각 시간 t마다 줄이 얼마만큼 위아래로 움직이는지를 나타냄)

이때 $\psi(x,t)$는 보통 다음과 같은 **파동 방정식(wave equation)**을 만족합니다.

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

여기서 v는 파동의 속도입니다.

줄의 각 작은 부분에는 운동 에너지와 탄성 잠재 에너지가 저장되어 있고, 파동이 진행함에 따라 이 에너지가 줄을 따라 옮겨 다니게 됩니다. 즉, 장(여기서는 변위장 ψ)이 에너지를 실어나르는 매개체 역할을 합니다.

3.4.2 전자기파와 장의 파동(맛보기)

전자기학에서는 전기장 $\mathbf{E}$와 자기장 $\mathbf{B}$가 빛의 속도 c로 전파되는 **전자기파**를 이룹니다. 수식으로는 맥스웰 방정식에서

$$\Box\mathbf{E} = 0, \qquad \Box\mathbf{B} = 0$$

와 같은 형태의 파동 방정식이 유도됩니다 ($\Box$는 d'Alembert 연산자, 상대론적 파동 연산자).

여기서 중요한 점은,

- 전기장과 자기장도 *장*,
- 이 장에 에너지 밀도 u_E, u_B가 저장되어 있고,
- 전자기파는 이 장 에너지가 공간을 따라 이동하는 현상

이라는 것입니다.

즉, "빛 = 전기장 · 자기장이 진동하면서 에너지를 전파하는 파동"이라고 이해할 수 있습니다.

3.4.3 에너지 흐름과 포인팅 벡터(개념적으로)

전자기장에서 에너지가 *어느 방향으로 흐르는지*를 나타내는 벡터를 **포인팅 벡터(Poynting vector)**라고 부릅니다.

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E} \times \mathbf{B}.$$

이 벡터는

- 크기: 단위 시간당, 단위 면적을 지나가는 에너지의 양(에너지 유속)
- 방향: 에너지가 실제로 전달되는 방향

을 나타냅니다.

지금 단계에서는 "전자기장에서 에너지 흐름은 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 방향으로 간다" 라는 개념적 이해만 가져가면 충분합니다. 나중에 에너지 보존법칙과 결합하면,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0$$

와 같은 **에너지 연속 방정식(continuity equation)**이 등장하며, 이는 "에너지가 어느 곳에서 줄어들면 주변 어디선가 그만큼 흘러 들어온다"는 보존법칙의 수학적 표현입니다.

3.4.4 에너지 연속 방정식의 형태와 보존법칙

일반적으로, 어떤 양(물질, 전하, 에너지 등)이 보존될 때, 그 양의 밀도 $\rho(\mathbf{r}, t)$와 유속(또는 전류) $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$는 다음과 같은 **연속 방정식**을 만족합니다.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

- 전하 보존: 전하 밀도 ρ_q, 전류 밀도 $\mathbf{j}_q$.
- 에너지 보존: 에너지 밀도 u, 에너지 유속(포인팅 벡터 등) $\mathbf{S}$.

이 식은 "어떤 작은 부피 안에서 양이 줄어드는 속도 = 유속이 밖으로 빠져나가는 속도"라는 의미를 담고 있습니다. 바로 이것이 **보존법칙의 미분형 표현**입니다.

장 이론의 관점에서는, "장에 에너지가 저장되고, 그 에너지가 파동과 함께 이동하며, 연속 방정식을 통해 보존법칙을 만족한다"는 큰 그림을 볼 수 있습니다. 다음 장에서는 이 그림을 **라그랑지안**과 **대칭**으로 연결하여, 뇌터 정리와 상대론적 장 이론으로 확장해 나갈 준비를 하겠습니다.

Chapter 4

라그랑지안 역학으로 보는 힘과 에너지

앞 장들에서는 "힘–일–에너지"를 중심으로 뉴턴 역학을 정리하고, 보존력과 퍼텐셜, 장과 에너지의 개념을 살펴보았습니다. 이제는 관점을 조금 바꾸어, **라그랑지안(Lagrangian)** 이라는 함수를 출발점으로 삼아 역학을 다시 써 보겠습니다.

라그랑지안 역학은

- 힘 $\mathbf{F}$를 직접 쓰지 않고,
- 에너지(운동 에너지 T, 퍼텐셜 에너지 U)만으로
- 운동 방정식을 유도하는 강력한 방법

입니다. 나중에 양자역학, 양자장론, 상대론적 장 이론으로 나아갈 때 기본 언어가 되는 형식이기도 합니다.

4.1 라그랑지안의 정의와 원리

4.1.1 라그랑지안 L = T - U

고전 역학에서 한 입자(또는 입자계)의 운동을 기술할 때, **라그랑지안** L은 보통

$$L = T - U$$

로 정의합니다.

- T: 운동 에너지(kinetic energy)
- U: 퍼텐셜 에너지(potential energy)

예를 들어, 질량 m인 질점이 1차원 좌표 x에서 움직이고, 퍼텐셜 에너지가 $U(x)$로 주어진다면

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \qquad L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x)$$

와 같이 쓸 수 있습니다. 여기서 점($\dot{x}$)은 시간에 대한 미분을 의미합니다.

$$\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}.$$

이처럼 라그랑지안은 보통 "좌표 q와 속도 $\dot{q}$의 함수"

$$L = L(q, \dot{q}, t)$$

로 생각합니다. (명시적으로 시간 t에 의존하는 경우도 있습니다.)

4.1.2 작용적분 S = ∫L dt

라그랑지안이 정의되면, 그로부터 **작용(action)**이라는 양을 정의할 수 있습니다. 작용 S는 시간 t_1에서 t_2까지의 라그랑지안을 적분한 것입니다.

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, dt.$$

여기서 $S[q]$라고 쓴 이유는, S가 "경로 $q(t)$ 전체"에 의존하기 때문입니다. 즉, 입자가 어떤 *경로*를 택했느냐에 따라 작용의 값이 달라집니다.

- $q(t)$: 실제로 물체가 따라간 경로
- $S[q]$: 그 경로에 해당하는 작용

라그랑지안 역학에서 핵심 질문은 다음과 같습니다.

> "입자는 어떤 경로 $q(t)$를 택할 때 실제 자연법칙과 일치하는가?"

4.1.3 최소 작용의 원리(변분 원리)

라그랑지안 역학의 핵심은 **최소 작용의 원리(principle of least action)**입니다. 좀 더 정확히 말하면 **정상 작용의 원리(principle of stationary action)**라고도 부릅니다.

그 내용은 다음과 같습니다.

> 시작점 (t_1, q_1)과 끝점 (t_2, q_2)를 고정했을 때, 자연이 실제로 선택하는 경로 $q(t)$는 작용 $S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\, dt$가 *정상(stationary)*가 되도록 하는 경로이다.

"정상"이라는 말은, 작은 변화 $\delta q(t)$를 가했을 때 작용의 변화 δS가 0이 된다는 뜻입니다.

$$\delta S = 0.$$

이때 $\delta S = 0$은 꼭 "최소(minimum)"가 아닐 수도 있지만, 많은 경우 최소값에 해당하기 때문에 관습적으로 "최소 작용"이라고 부릅니다.

이 변분 원리(variation principle)를 수학적으로 전개하면, **오일러–라그랑주 방정식**이라는 운동 방정식을 얻게 됩니다. 다음 절에서 그 유도 과정을 간단히 살펴봅니다.

4.2 오일러–라그랑주 방정식

4.2.1 한 좌표에 대한 유도

하나의 일반화 좌표 $q(t)$를 가지는 1자유도 계를 생각해 봅시다. 작용은

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} L\big(q(t), \dot{q}(t), t\big)\, dt$$

입니다.

이제 경로 $q(t)$를 아주 조금 바꾼 $q(t) + \delta q(t)$를 생각합니다. 단, 처음과 끝의 위치는 고정한다고 가정합니다.

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0.$$

변분을 취하면

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q}\,\delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q} \right) dt.$$

여기서 $\delta \dot{q} = \frac{\mathrm{d}(\delta q)}{\mathrm{d}t}$입니다.

두 번째 항에 대해 적분 부분적분을 해 줍니다.

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta \dot{q}\,dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\,\delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\,dt.$$

경계에서 $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$이므로, 경계항은 0이 됩니다. 따라서

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q\,dt.$$

이제 $\delta q(t)$는 임의의 작은 함수이므로, 적분이 항상 0이 되기 위해서는 integrand가 0이어야 합니다. 즉,

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0.$$

이것이 바로 1자유도 계에 대한 **오일러–라그랑주 방정식**입니다.

4.2.2 다수 자유도에 대한 일반화

좌표가 여러 개 $q_1, q_2, \ldots, q_n$인 계에 대해서는, 라그랑지안이

$$L = L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$$

와 같이 주어집니다.

각 좌표 q_i에 대해 똑같이 변분을 수행하면, 각각의 자유도에 대해 오일러–라그랑주 방정식

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

을 얻습니다.

결국, n개의 운동 방정식이 한 번에 나오며, 이 방정식들을 풀면 계의 운동을 완전히 기술할 수 있습니다.

4.2.3 뉴턴 방정식으로의 환원 예제

오일러–라그랑주 방정식이 뉴턴의 운동법칙과 어떻게 연결되는지 간단한 예로 확인해 봅시다.

질량 m인 입자가 1차원 좌표 x에서 움직이고, 퍼텐셜 $U(x)$를 가지는 경우를 다시 생각합니다.

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - U(x).$$

오일러–라그랑주 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

이므로,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}.$$

따라서

$$m\ddot{x} - \left(-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad m\ddot{x} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}.$$

이 식은 바로 뉴턴의 운동 법칙

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (\text{여기서 } F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x})$$

과 동일합니다.

즉, **라그랑지안 $L = T - U$와 오일러–라그랑주 방정식은 뉴턴 역학을 완전히 재구성하는 또 다른 언어**라는 것을 알 수 있습니다. 이 언어의 장점은, 좌표계가 복잡해져도 "힘" 대신 "T와 U로부터 계산된 L"만 알면 된다는 데 있습니다.

4.3 좌표 선택과 일반화 좌표

4.3.1 극좌표, 각좌표로의 변환

라그랑지안 형식에서 좌표 q_i는 꼭 x, y, z 같은 직교 좌표일 필요가 없습니다. 문제를 풀기 편한 아무 좌표나 선택할 수 있습니다. 이때 이런 좌표들을 **일반화 좌표(generalized coordinates)**라고 부릅니다.

예를 들어, 2차원에서 입자는 극좌표 (r, θ)로 나타낼 수 있습니다.

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta.$$

시간에 따라 움직이면

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta.$$

그래서 속도 제곱은

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2.$$

따라서 운동 에너지는

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

이처럼 극좌표를 일반화 좌표 $(q_1, q_2) = (r, \theta)$로 사용하면, 라그랑지안은

$$L(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r, \theta)$$

와 같이 쓸 수 있습니다.

4.3.2 진자, 구심력 문제의 라그랑지안

(1) 단진자(단순 진자) 길이 ℓ인 줄에 질량 m이 매달린 단진자를 생각해 봅시다. 진자의 위치는 각도 θ 하나만으로 나타낼 수 있으므로, 일반화 좌표로 θ를 사용합니다.

진자의 속도는

$$v = \ell\dot{\theta}$$

이므로,

$$T = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2.$$

퍼텐셜 에너지는 기준을 어떻게 잡느냐에 따라 다르지만, 예를 들어 $\theta = 0$일 때 가장 아래 위치, $U = 0$으로 잡으면, 질점의 높이는 $\ell(1 - \cos\theta)$이고,

$$U(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta).$$

라그랑지안은

$$L(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - mg\ell(1 - \cos\theta)$$

입니다. 이로부터 오일러–라그랑주 방정식을 세우면

$$m\ell^2\ddot{\theta} + mg\ell\sin\theta = 0$$

을 얻을 수 있고, 이는 단진자의 운동 방정식입니다.

(2) 중심력과 구심력 질량 m인 입자가 중심력 $F(r)$을 받는 2차원 운동을 할 때, 극좌표를 사용하면 라그랑지안은

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r),$$

여기서 $U(r)$는 중심력의 퍼텐셜입니다.

이때 θ에 대한 오일러–라그랑주 방정식은

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mr^2\dot{\theta}\right) = 0$$

이 되어, $mr^2\dot{\theta}$(각운동량)가 보존된다는 것을 보여 줍니다. 이렇듯, 적절한 좌표를 고르면 각운동량 보존, 구심력 운동 등도 깔끔하게 나타납니다.

4.3.3 일반화 속도와 일반화 힘의 개념

라그랑지안 형식에서 각 좌표 q_i에 대응하는 속도 $\dot{q}_i$를 **일반화 속도(generalized velocity)** 라고 부릅니다. 마찬가지로, 각 q_i에 대한 오일러–라그랑주 방정식을

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

처럼 쓸 수 있을 때, Q_i를 **일반화 힘(generalized force)**라고 부릅니다.

여기서 Q_i는 꼭 F_x, F_y 같은 물리적 힘의 성분일 필요는 없고, 외부에서 주는 비보존 힘, 구속력, 토크 등을 해당 좌표에 맞게 변환한 값입니다.

이 개념 덕분에, 라그랑지안 형식은 좌표계가 복잡하거나 구속 조건이 있는 문제에서도 매우 유용합니다.

4.4 비보존력의 라그랑지안 처리(간단 소개)

4.4.1 레이리 함수(마찰 항) 맛보기

라그랑지안 형식은 기본적으로 *보존력*에 최적화되어 있습니다. 하지만 작은 마찰, 점성 저항 같은 비보존력도 어느 정도는 형식 안에 끼워 넣을 수 있습니다.

그 한 가지 방법이 **레이리 소산 함수(Rayleigh dissipation function)** R입니다. 속도에 비례하는 마찰력이 있을 때,

$$R = \frac{1}{2}c\dot{q}^2$$

와 같이 정의하고, 오일러–라그랑주 방정식을

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0$$

처럼 수정합니다.

예를 들어, 1차원에서 감쇠 조화진동자

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$$

를 기술하고 싶다면,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2, \qquad R = \frac{1}{2}b\dot{x}^2$$

로 두고 위의 수정된 오일러–라그랑주 방정식을 쓰면 원래의 운동 방정식을 얻을 수 있습니다.

4.4.2 유효 퍼텐셜과 비보존 효과

비보존력 자체를 퍼텐셜로 직접 표현하기는 어렵지만, 상황에 따라서는 "평균적인 효과"를 **유효 퍼텐셜(effective potential)**로 흡수해서 다루는 경우가 있습니다.

예를 들어,

- 회전 좌표계에서의 원심력/코리올리 힘 일부를 유효 퍼텐셜로 넣거나,
- 진동하는 구속 조건(빠르게 진동하는 기저 등)의 효과를 시간 평균한 유효 퍼텐셜로 표현하는 등

완벽한 보존력은 아니지만, *일정 조건에서는* 퍼텐셜로 다룰 수 있는 근사 모형이 등장합니다.

또한 앞에서 본 중심력 문제에서

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

처럼 각운동량 보존을 이용해 유효 퍼텐셜을 도입하면, 실제 2차원 문제를 1차원 유효 퍼텐셜 문제로 바꿔 생각할 수 있습니다. (여기서는 비보존력은 아니지만, *여러 효과를 퍼텐셜에 흡수한다*는 아이디어를 보여 주는 좋은 예입니다.)

4.4.3 에너지 비보존과 라그랑지안 접근의 한계

라그랑지안 $L = T - U$는 기본적으로

- 에너지가 잘 정의되고,
- 보존력이 지배적인,
- 닫힌계(고립계)에 가까운 상황

에서 가장 깔끔하게 작동합니다.

마찰, 점성, 복잡한 환경과의 상호작용 등 **에너지가 열이나 소음 등으로 빠져나가는 열린계**에서는

- 레이리 함수,

- 효과적인 마찰 항,
- 환경을 포함한 더 큰 계에 대한 라그랑지안

을 도입해야 하고, 그 과정에서 수학이 많이 복잡해집니다.

즉,

> "라그랑지안 형식은 모든 비보존 현상을 완벽하게 다루는 만능 도구는 아니지만, 보존력을 중심으로 한 다양한 물리계의 구조를 통일적으로 이해하는 데 매우 강력한 언어이다."

다음 장에서는 이 라그랑지안 형식 위에서 **대칭성과 보존법칙**을 연결하는 **뇌터 정리**를 살펴보고, 에너지–운동량, 각운동량, 전하 보존과 같은 익숙한 법칙들이 "라그랑지안의 대칭성"에서 자연스럽게 나오는 모습을 보게 될 것입니다.

Chapter 5

대칭과 보존법칙: 뇌터 정리 맛보기

앞 장에서는 라그랑지안 $L = T - U$와 작용 $S = \int L\,dt$에서 오일러–라그랑주 방정식을 유도하여, 뉴턴 역학을 다시 쓰는 방법을 보았습니다.

이제는 "**왜 어떤 물리량은 보존되는가?**"라는 질문에 한 걸음 더 다가가 보겠습니다. 에너지, 운동량, 각운동량이 보존된다는 사실은 고등학교 때부터 익숙하지만, 그 이유를 정말 깊게 물어보면

"물리법칙이 어떤 *대칭성(symmetry)*을 갖기 때문"

이라는 대답이 나옵니다.

이 장에서는 **대칭과 보존법칙을 연결해 주는 뇌터 정리**를 쉬운 수준에서 맛보는 것이 목표입니다.

- 시간에 대해 법칙이 변하지 않으면 ⇒ 에너지 보존
- 공간을 평행 이동해도 법칙이 변하지 않으면 ⇒ 운동량 보존
- 공간을 회전해도 법칙이 변하지 않으면 ⇒ 각운동량 보존

이 "대칭 ⇒ 보존량"이라는 놀라운 연결이 바로 뇌터 정리의 핵심입니다.

5.1 물리법칙의 대칭성 직관

5.1.1 시간을 옮겨도 같은 법칙: 시간 병진 대칭

우리가 실험을 할 때, 오늘(예: $t = 0$)에 한 실험과 내일(예: $t = 1\,\mathrm{day}$)에 한 실험이 *같은 조건이라면* 같은 결과를 얻으리라고 기대합니다. 이는 다음과 같은 믿음에 바탕을 둡니다.

"물리법칙은 시간이 지나도 변하지 않는다."

이것을 **시간 병진(translation) 대칭** 또는 **시간 평행 이동 대칭**이라고 부릅니다. 조금 더 수학적으로 말하면,

$$t \to t' = t + \Delta t$$

와 같이 시간을 일정량 Δt만큼 옮겨도, 라그랑지안과 운동 방정식의 형태가 바뀌지 않는다는 뜻입니다.

즉, "언제 실험하든 결과를 지배하는 법칙은 같다"는 것이 바로 시간 대칭성의 내용입니다.

5.1.2 공간을 옮겨도 같은 법칙: 공간 병진 대칭

마찬가지로, 실험실을 서울에서 부산으로 옮긴다고 해서, 뉴턴의 운동법칙이 $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$에서 $\mathbf{F} = 2m\mathbf{a}$로 갑자기 바뀌지는 않습니다. 중력, 전자기력, 기본 상수들의 값이 "어디에서 실험하느냐"에 따라 갑자기 변하지 않는다고 믿습니다.

이런 믿음은 다음과 같은 표현으로 요약됩니다.

> "공간의 어느 위치에서든 물리법칙은 같다."

이를 **공간 병진 대칭**이라고 부릅니다. 수학적으로는

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{a}$$

와 같이 공간 좌표를 일정 벡터 $\mathbf{a}$만큼 평행 이동시켰을 때, 라그랑지안과 운동 방정식의 형태가 변하지 않는다는 뜻입니다.

5.1.3 회전시켜도 같은 법칙: 회전 대칭

또 하나의 중요한 대칭은 **회전 대칭(rotational symmetry)**입니다. 실험 장치를 동쪽으로 두고 실험하나, 서쪽으로 돌려놓고 실험하나, 똑같은 상황이라면 동일한 결과를 얻어야 한다고 생각합니다.

즉,

> "공간의 방향을 바꾸어도(회전시켜도) 물리법칙은 같다."

수학적으로는

$$\mathbf{r} \to \mathbf{r}' = R\mathbf{r}$$

와 같이, 회전 행렬 R을 사용하여 좌표계를 돌렸을 때, 라그랑지안의 형태가 동일하게 유지된다는 의미입니다.

이 세 가지 대칭성(시간 평행 이동, 공간 평행 이동, 회전)은 우리가 일상적으로 받아들이는 "우주가 어디서나, 언제나, 어느 방향으로나 같다"는 직관을 수학적으로 정리한 것입니다. 뇌터 정리는 바로 이 대칭성들에서 에너지, 운동량, 각운동량 보존이 나온다고 말해 줍니다.

5.2 뇌터 정리의 아이디어

5.2.1 대칭 ⇒ 보존량이라는 주장

뇌터 정리(Emmy Noether, 1918)의 핵심은 다음 한 문장으로 요약할 수 있습니다.

> **(연속적인) 대칭 하나당, 보존량 하나가 대응된다.**

여기서 "연속적"이라는 말은, 작은 변화 파라미터 ε를 써서

$$q \to q' = q + \varepsilon\,\delta q$$

처럼 조금씩 변화시킬 수 있는 대칭을 의미합니다.

예를 들어,

- 시간 병진: $t \to t + \varepsilon$

- 공간 병진: $x \to x + \varepsilon$
- 회전: 각도 $\theta \to \theta + \varepsilon$

등은 모두 연속적인 대칭입니다.

뇌터 정리는 "라그랑지안이 이런 변환에 대해 대칭이면, 그에 해당하는 양이 시간에 따라 보존된다"고 주장합니다.

5.2.2 라그랑지안의 변환과 변화량

좀 더 구체적으로, 일반화 좌표 $q_i(t)$에 대한 작은 변환을 생각해 봅시다.

$$q_i(t) \to q_i'(t) = q_i(t) + \varepsilon\,\Delta q_i(t),$$

여기서 ε는 아주 작은 실수 파라미터입니다.

이때 라그랑지안 $L(q, \dot{q}, t)$가 이 변환에 대해 어떻게 변하는지를 살펴봅니다. 만약 변환 후 라그랑지안이

$$L'(q', \dot{q}', t') = L(q, \dot{q}, t) + \varepsilon\,\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$$

처럼, **전체 시간 미분 항을 제외하고는** 변하지 않는다면, (많은 경우 ε에 대해 정확히 불변, 즉 $F = 0$인 경우도 많습니다) 이 대칭에 해당하는 보존량이 존재한다는 것이 뇌터 정리의 내용입니다.

여기서 "전체 시간 미분 항"은 작용 적분 $S = \int L\,dt$를 계산할 때 경계에서만 영향을 주기 때문에, 변분 원리(오일러–라그랑주 방정식)에는 영향을 주지 않습니다.

5.2.3 뇌터 전류와 보존식의 형태

뇌터 정리는 "대칭 ⇒ 보존량"을 다음과 같은 수식으로 표현합니다.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 0.$$

여기서 Q는 그 대칭에 대응하는 **보존량(conserved quantity)**입니다.

장 이론에서 공간 의존성을 포함해서 쓰면, 보통

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

라는 형태의 식을 얻게 됩니다. 여기서 J^μ는 **뇌터 전류(Noether current)**라고 부르는 4-벡터이며, $\partial_\mu J^\mu = 0$은 연속 방정식 형태의 보존식을 의미합니다.

- 입자 역학 수준: Q가 상수 $\Rightarrow \dfrac{dQ}{dt} = 0.$
- 장 이론 수준: J^μ의 발산이 0 ⇒ "밀도–전류" 연속 방정식.

이 장에서는 입자 역학 수준의 간단한 예를 중심으로 보지만, 이 아이디어가 나중에 장 이론, 양자장론, 게이지 이론, 정보 게이지 이론에서 훨씬 더 중요한 역할을 하게 됩니다.

5.3 구체적인 예: 에너지, 운동량, 각운동량

5.3.1 시간 병진 대칭 ⇒ 에너지 보존

라그랑지안이 시간 t에 *명시적으로* 의존하지 않는다고 가정해 봅시다. 즉,

$$L = L(q, \dot{q})$$

와 같이, t가 직접 들어가지 않는 경우입니다. 이것이 바로 “시간 병진 대칭”의 한 형태입니다.

이때 뇌터 정리에 따르면,

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

라는 양이 보존됩니다. 이 H를 **해밀토니안(또는 에너지 함수)**라고 부르는데, 많은 경우 이것은 계의 **총 에너지** E와 일치합니다. 즉,

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad H \equiv E = T + U.$$

따라서,

“시간에 대해 물리법칙이 변하지 않는다” ⇒ “계의 총 에너지가 보존된다”

라는 결론을 얻습니다.

5.3.2 공간 병진 대칭 ⇒ 운동량 보존

이번에는 라그랑지안이 *어떤 방향으로의 좌표 변화*에 대해 대칭인 경우를 생각해 봅시다. 예를 들어, 1차원 x 방향으로 Δx만큼 평행 이동해도 라그랑지안의 형태가 바뀌지 않는다면,

$$x \to x' = x + \varepsilon$$

에 대해 L이 불변이라는 뜻입니다.

이 경우, 뇌터 정리는 다음과 같이 말합니다.

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$$

가 보존된다는 것입니다. 이 p_x는 바로

$$p_x = m\dot{x}$$

와 같이 익숙한 **선형 운동량**으로 해석됩니다.

3차원에서 x, y, z에 대한 병진 대칭이 모두 있을 경우, 각 방향에 대응하는 운동량

$$p_x, \quad p_y, \quad p_z$$

가 각각 보존됩니다. 벡터로 쓰면

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

가 보존된다는 이야기입니다.

정리하면,

“공간을 평행 이동해도 물리법칙이 변하지 않는다” ⇒ “운동량이 보존된다”

는 결론이 나옵니다.

5.3.3 회전 대칭 ⇒ 각운동량 보존

라그랑지안이 어떤 축을 중심으로 한 **회전**에 대해 불변이라면, 그 축에 대한 **각운동량 (angular momentum)**이 보존됩니다.

간단히 2차원 평면에서 극좌표 (r, θ)를 사용하는 입자를 생각해 봅시다. 라그랑지안이

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - U(r)$$

처럼 θ에 명시적으로 의존하지 않는다고 합시다. 이는 "원점을 중심으로 회전시켜도 법칙이 변하지 않는다"는 회전 대칭을 의미합니다.

이때 뇌터 정리에 따르면,

$$p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$$

가 보존됩니다. 이 p_θ는 바로 원점을 기준으로 한

$$L_z = mr^2\dot{\theta}$$

라는 z**축 방향 각운동량**입니다.

3차원에서 완전한 회전 대칭이 있을 경우, 각 축에 대한 각운동량 벡터

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

가 보존됩니다.

정리하면,

"공간을 회전시켜도 물리법칙이 변하지 않는다" ⇒ "각운동량이 보존된다"

라는 결론이 나옵니다.

5.4 간단한 문제와 직관 훈련

5.4.1 중력장 속 질점계에서의 대칭성

근지구장 중력(중력가속도 $\mathbf{g}$ 일정)을 생각해 봅시다. 퍼텐셜 에너지가

$$U(y) = mgy$$

인 상황에서, 어떤 대칭성이 존재할까요?

- 수평 방향(예: x 방향)으로는 퍼텐셜이 변하지 않습니다. ⇒ x-방향 운동량 p_x가 보존됩니다.
- 수직 방향(예: y 방향)으로는 퍼텐셜이 y에 의존합니다. ⇒ y-방향 운동량 p_y는 일반적으로 보존되지 않습니다.
- 시간에 대해서는, 공기 저항이나 시간에 따라 변하는 외력이 없다면 라그랑지안이 t에 명시적으로 의존하지 않습니다. ⇒ 총 에너지 E가 보존됩니다.

이 예를 통해, "어떤 방향으로는 대칭이고, 어떤 방향으로는 대칭이 아니다"라는 것이 운동량 보존 여부와 직접적으로 연결된다는 것을 볼 수 있습니다.

5.4.2 중심력 문제와 각운동량 보존

만유인력이나 쿨롱력처럼 **중심력(central force)**은 항상 어떤 한 점(중심)을 향하거나 멀어지는 방향으로만 작용합니다. 이 경우 퍼텐셜은 오직 거리 r에만 의존합니다.

$$U = U(r).$$

이때 라그랑지안은 회전에 대해 불변입니다. (어느 방향에서 보든, r만 중요하지 방향은 중요하지 않기 때문입니다.)

- 회전 대칭 ⇒ 각운동량 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ 보존.
- 실제로 행성의 궤도 운동에서 "행성-태양을 잇는 선분이 같은 시간 동안 같은 넓이를 쓸어낸다"는 케플러 제2법칙은 바로 각운동량 보존의 직접적인 표현입니다.

이 예는 "대칭 ⇒ 보존량"이 단지 수학적인 장난이 아니라, 천체역학의 실제 법칙과도 깊이 연결되어 있음을 보여 줍니다.

5.4.3 어떤 대칭이 보존되지 않는 경우?

반대로, **어떤 조건에서 대칭이 깨지는지**를 생각해 보는 것도 중요합니다.

- **에너지 비보존** 시간에 따라 변하는 외력이 작용하거나, 퍼텐셜이 명시적으로 시간에 의존하는 경우 (예: $U(x,t)$), 라그랑지안 $L(q,\dot{q},t)$가 시간 병진 대칭을 잃게 됩니다. ⇒ 에너지 보존이 일반적으로 성립하지 않습니다.
- **운동량 비보존** 외부에서 x 방향으로 일정한 힘이 계 전체에 작용한다면, 공간 병진 대칭이 깨집니다. 예: 지면과의 마찰이 있는 수레, 벽에 부딪히는 공 등. ⇒ 그 방향의 운동량은 보존되지 않습니다.
- **각운동량 비보존** 외부에서 비중심력(예: 특정 방향을 가진 힘)이 계속 작용하면, 회전 대칭이 깨집니다. 예: 회전하는 물체에 일정한 토크를 가하는 상황. ⇒ 각운동량이 변화합니다.

이처럼, *어떤 보존법칙이 깨졌다는 것은 그에 대응하는 대칭이 깨졌다*는 것과 동일한 말입니다. 반대로, *어떤 대칭이 유지되는 한 그에 대응하는 보존량은 반드시 존재*합니다.

이 장에서는 뇌터 정리의 *정확한 수학적 증명*보다는,

$$\text{대칭} \quad \Rightarrow \quad \text{보존량}$$

이라는 큰 그림과, 에너지–운동량–각운동량 보존이 시간–공간–회전 대칭에서 나온다는 사실을 직관적으로 익히는 것이 목표였습니다.

다음 장에서는 이 생각을 **상대론적 장 이론**으로 확장하여, 에너지–운동량 텐서, 로렌츠 대칭과 보존법칙의 관계를 조금 더 넓은 관점에서 살펴보게 될 것입니다.